8

Take Home Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
Inleveren uiterlijk 18 Juni 2004, 14.00 uur [1]

1. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(x,x) = \frac{x}{2}.$$

Controleer het antwoord en schets de karakteristieken.

2. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(2x,0) = 5x.$$

3. Geef in elk punt van $\mathbb{R}^2$ de klassificatie van de vergelijking

$$u_{yy} + 2u_{xy} + (\sin x)^2 u_{xx} + u_x = 0,$$

en bepaal, waar mogelijk, de karakteristieken. Schets de situatie.

4. Beschouw de warmte-vergelijking

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

met de condities

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Laat zien dat voor elke functie $f(x)$, $0 < x < \pi$, met $|f(x)| \leq 1$, geldt dat voor voldoend grote t:

$$|u(x,t)| \leq \frac{2}{(\pi)}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Neem aan dat $f(x)$ gegeven wordt door

$$f(x) = 0, \quad 0 < x \leq \pi/2, \quad f(x) = 1, \quad 0 < x \leq \pi.$$

Bepaal de (formele) reeeksontwikkeling van de oplossing $u(x,t)$.

[1] Inleveren bij Marc Dröge, kamer 238, tel. 3972. In de daarop volgende week dient de deelnemer zijn werk mondeling toe te lichten (na afspraak). Deelname is alleen geldig na registratie bij Marc Dröge; registratie houdt in dat het werk zelfstandig gemaakt wordt. Deelname nu sluit deelname aan het tentamen op 29 Juni 2004 uit.

5. Neem aan dat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ een voldoende glad gebied is en neem aan dat $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ een continue functie is. Laat zien dat het niet-lineaire probleem

$$\Delta u - u^3 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

met de randconditie

$$u = f \quad \text{op} \quad \partial\Omega,$$

hooguit één oplossing bezit.
Aanwijzing: gebruik één van de formules van Green en maak gebruik van het feit dat $(a-b)(a^3-b^3)$ niet-negatief is als $a, b \in \mathbb{R}$.

6. Beschouw op $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < \pi \}$ de vergelijking voor trillende membranen:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x,y) \in \Omega, \quad t > 0,$$

met randcondities

$$u = 0 \quad \text{op} \quad \partial\Omega, \quad t > 0,$$

en

$$u(x,y,0) = f(x)f(y), \quad u_t(x,y,0) = 0.$$

Hierbij wordt de functie f gegeven door

$$f(s) = s, \quad 0 < s \leq \pi/2, \quad f(s) = \pi - s, \quad \pi/2 < s \leq \pi.$$

Los dit probleem formeel op met behulp van scheiding van variabelen.
Aanwijzing: In $f(x)f(y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{nm} \sin nx \sin my$ zijn de coefficienten B_{nm} producten van de Fourier coefficienten van f.

7. De volgende partiële differentiaalvergelijking beschrijft zogenaamde minimale oppervlakken:

$$(1 + (u_y)^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + (u_x)^2)u_{yy} = 0.$$

Bepaal een oplossing van deze niet-lineaire vergelijking door 'additieve scheiding van variabelen': $u(x,y) = X(x) + Y(y)$, waarbij $X(0) = X'(0) = 0$ en $Y(0) = Y'(0) = 0$.

opg 2
Jan 4.8

8. Bepaal de Riemann functie voor

$$Lu = u_{xy} + xu_x + yu_y + xyu.$$